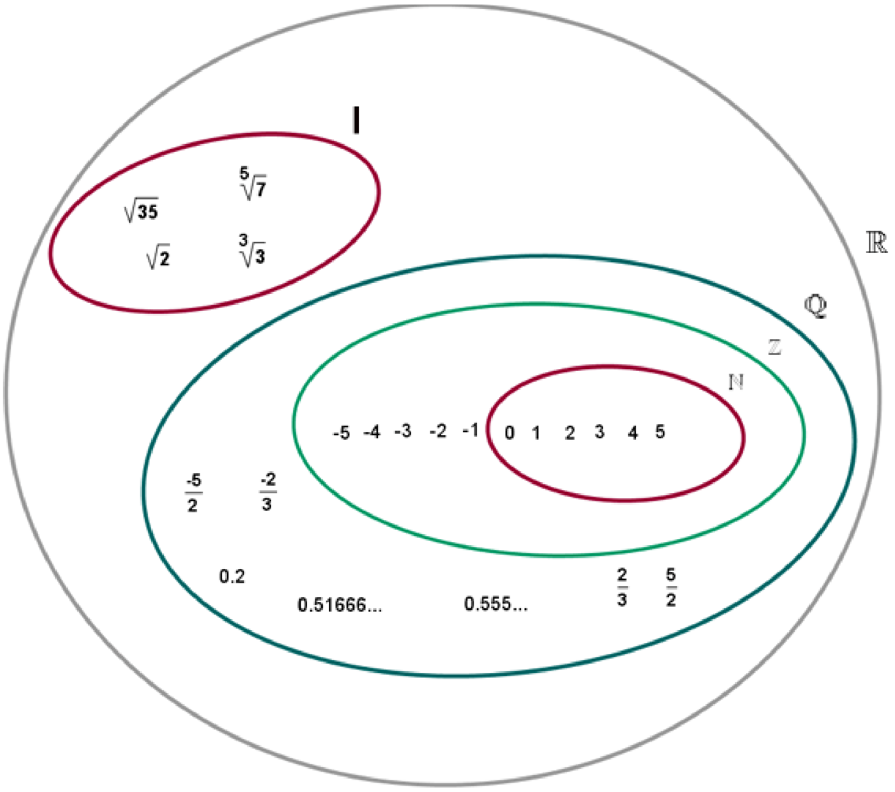
TEMA 1: NÚMEROS REALES

1. INTRODUCCIÓN

El **conjunto formado** por los números **racionales** e **irracionales** es el conjunto de los ***números reales***, se designa por $\mathbb{R}$



Con los **números reales** podemos realizar **todas las operaciones, excepto la radicación de índice par y radicando negativo y la división por cero.**

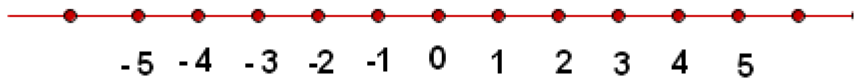
2. NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS

- El **conjunto de los números naturales** está formado por:

  N = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,...}

- **El conjunto de los números enteros** está formado por:
  $\mathbb{Z}$ **= {...−5, −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 ...}**

Dado que los enteros contienen los enteros positivos, se considera a **los números naturales son un subconjunto de los enteros**.



3. NÚMEROS RACIONALES

Un **número racional** es todo **número** que puede representarse mediante una fracción la cual debe estar determinada por el **cociente** de **dos enteros**, con denominador distinto de cero. Se representa por $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}; \ b \in \mathbb{Z}; \ b \neq 0 \right\}$$

Los números racionales también pueden expresarse mediante un número decimal, que puede tener:

- Un número finito de cifras decimales (ej: 3’4; 3’123; 2)
- Un número infinito de cifras decimales en las que se repite una secuencia fija de cifras llamada período. (ej: 2’333…=$2'\widehat{3}$)

Para obtener la expresión decimal de un número racional a partir de su expresión fraccionaria, se divide el numerador entre el denominador.

Ej: $\frac{13}{5} = 2'6$ $\qquad$ $\frac{44}{9} = 4'888....$

Para obtener la expresión fraccionaria a partir de la decimal: (Fracción generatriz)

- Si tiene un número finito de cifras decimales, se multiplica y divide por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga. Si es posible, se simplifica la fracción obtenida.

  Ej: $15'26 = \frac{1526}{100} = \frac{763}{50}$

- Si la expresión decimal es periódica, se multiplica el número por la unidad seguida de tantos ceros como lugares sea necesario mover la coma hasta el final del periodo; y, por otra parte, por la unidad seguida de los ceros necesarios para mover la coma al principio del periodo. Finalmente, se restan los dos resultados obtenidos y, si es posible, se simplifica la fracción obtenida.

  Ej: $N = 2'\widehat{2} = 2'222...$

$$\begin{array}{rl} 10N = & 22'222\ldots \\ -\quad N = & 2'222\ldots \\ \hline \end{array}$$

$$9N = 20 \quad ; \qquad N = \frac{20}{9}$$

Otro modo:

- Si la fracción es **periódica pura**, la fracción generatriz tiene como numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera, y por denominador un número formado por tantos nueves como cifras tenga el período.

- Si la fracción es ***periódica mixta***, la fracción generatriz tiene como numerador el número dado sin la coma, menos la parte entera seguida de las cifras decimales no periódicas, y por denominador, un numero formado por tantos nueves como cifras tenga el período**,** seguidos de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal no periódica.

Operaciones con números racionales

La **suma** de números racionales expresados mediante fracciones se obtiene aplicando las siguientes reglas:

- Si tiene el mismo denominador: Se suman los denominadores y se deja el mismo denominador.

$$\frac{5}{7}+\frac{1}{7}=\frac{6}{7} \qquad \frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$

- Si tienen distinto denominador: Se reducen a común denominador; se deja el denominador obtenido y se suman los nuevos numeradores.
  El denominador común será el mínimo común múltiplo (m.c.m.) de los denominadores y los numeradores se obtienen dividiendo el m.c.m. por cada denominador y multiplicando el resultado por cada numerador.

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15+2}{12}=\frac{17}{12} \qquad \frac{5}{4}-\frac{1}{6}=\frac{15-2}{12}=\frac{13}{12}$$

El **producto** de dos fracciones es igual al producto de los numeradores partido por el producto de los denominadores.

$$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$$

Para **dividir** dos números racionales multiplicamos el dividendo por el inverso del divisor.

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} \qquad \frac{5}{7}:\frac{1}{6}=\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{1}=\frac{30}{7}$$

4. NÚMEROS IRRACIONALES

El conjunto de los números irracionales está formado por aquellos números que cuando los expresamos en forma decimal, aparecen infinitas cifras decimales no periódicas. Los números irracionales, por tanto, no se pueden expresar en forma de fracción.

Ej: π = 3.141592653589... **e** = 2.718281828459...

5. POTENCIAS

La potencia a^n, donde la base a es un número real y el exponente n es un número natural, expresa de forma abreviada el producto de n factores iguales a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots}_{\text{n veces}}$$

- Exponente entero:

  $a^0 = 1$

  $a^1 = a$

  $\frac{1}{a^n}$ $\quad a \neq 0$

- Exponente racional:

  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Propiedades de las potencias

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$
3) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5) $(a:b)^n = a^n : b^n$
6) $(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots\ldots}_{\text{n veces}}$

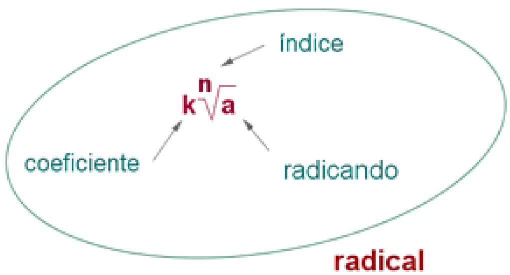
Identidades relacionadas

1) $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$
2) $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$
3) $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

5. RADICALES

Un radical es la raíz indicada de un número real.

$$\sqrt[n]{A} = X \iff X^n = A$$



Se puede expresar un **radical** en forma de **potencia**: $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Propiedades de los radicales

1) Radicales equivalentes: Si se multiplican o dividen el índice y el exponente de un radical por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente.

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{k \cdot m}{k \cdot n}} \qquad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot k]{a^{m \cdot k}} \qquad \text{Ej:} \ \sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$$

2) Reducción de radicales a índice común: Hallamos el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice. Después dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes.

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2} \qquad \sqrt[4]{2^2 \cdot 3^3}$$

$$\text{m.c.m.}(2, 3, 4) = 12$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{2^8 \cdot 3^8} \qquad \sqrt[12]{2^6 \cdot 3^9}$$

Extracción e introducción de factores en un radical

Se descompone el radicando en factores. Si:

- Un exponente es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando.

$$\sqrt{6} = \sqrt{2 \cdot 3}$$

$$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

- Un exponente es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando.

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

- Un exponente es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando.

$$\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = 2^2\sqrt{3} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

$$\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\sqrt[3]{3^2} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 3 \\ \hline 2 & 1 \end{array}$$

$$\sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot 5^5} = 3 \cdot 5^2 \sqrt{2 \cdot 5}$$

$$\sqrt[4]{2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5 \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2}$$

Se introducen los factores elevados al índice correspondiente del radical.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

$$2\sqrt{3}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{12}$$

$$2^2 \cdot 3^3 \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3} =$$

$$= \sqrt[4]{2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^9 \cdot 3^{13}}$$

Suma y Diferencia de radicales

Sólo puedes sumarse o retarse los radicales iguales.

$$2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\sqrt{2} = -\sqrt{2}$$

$$3\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\sqrt[4]{5} = 0$$

$$\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{2^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Producto de radicales

- Para multiplicar radicales **con el mismo índice** se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = 2\sqrt{3}$$

Cuando terminemos de realizar una operación extraeremos factores del radical, si es posible.

- **Si tienen distinto índice**, primero se reducen a índice común y luego se multiplican.

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} =$$

$$m.c.m.(2, 3, 4) = 12$$

$$\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\ \sqrt[12]{3^{11}}$$

Cociente de radicales

- Para dividir radicales **con el mismo índice** se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt[6]{128}}{\sqrt[6]{16}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

- **Si tienen distinto índice**, primero se reducen a índice común y luego se dividen.

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} = \sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} = \sqrt[6]{2}$$

Potencia de radicales

Para elevar un radical a una potencia, se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\left(\sqrt[3]{18}\right)^2 = \sqrt[3]{18^2} = \sqrt[3]{\left(2\cdot 3^2\right)^2} = \sqrt[3]{2^2\cdot 3^4} = 3\sqrt[3]{12}$$

Raíz de un radical

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$$

$$\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{2^4\sqrt[4]{2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(2^4\right)^4\cdot 2}}} = \sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16}\cdot 2}}} = \sqrt[24]{2^{17}}$$

Racionalización de radicales

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones.

Podemos distinguir tres casos.

1) Racionalización del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a\cdot\sqrt{c}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

2) Racionalización del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m}\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^m\cdot c^{n-m}}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\sqrt[n]{c^n}} = \frac{a\cdot\sqrt[n]{c^{n-m}}}{b\cdot c}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[5]{4}}=\frac{2}{3\sqrt[5]{2^2}}=\frac{2\cdot\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2}\cdot\sqrt[5]{2^3}}=\frac{2\sqrt[5]{8}}{3\sqrt[5]{2^5}}=\frac{2\sqrt[5]{8}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt[5]{8}}{3}$$

3) Racionalización del tipo $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$, y en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical**.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$a+b \rightarrow a-b \qquad a-b \rightarrow a+b$

$-a+b \rightarrow -a-b \qquad -a-b \rightarrow -a+b$

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados**".

$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

$$\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2-3}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{-1}=-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}$$

6. NOTACIÓN CIENTÍFICA

Se utiliza para expresar cantidades muy grandes o muy pequeñas.
Un número escrito en forma de notación científica se compone de dos factores:

- Un número decimal con un número finito de cifras decimales y cuya parte entera tiene una única cifra no nula.
- Una potencia de 10 cuyo exponente se denomina orden de magnitud y que es positivo (números grandes) o negativo (números pequeños)

Ej: $6\cdot 10^9 = 6.000.000.000$

$3'1\cdot 10^{-5} = 0'000031$